

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1

Δίνεται η διαφορική εξίσωση:

$$(E) \quad (2x + 3y + 1)dx + (3x + 4y + 1)dy = 0.$$

- (i) Να επιλύσετε την παραπάνω εξίσωση.
- (ii) Εξετάστε αν
 - (α) υπάρχει λύση y της εξίσωσης (E) τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) \in \mathbb{R}^* \cup \{+\infty\}$.
 - (β) υπάρχει ταλαντούμενη λύση της εξίσωσης (E) .
- (iii) Υποδείξτε ένα τρόπο επίλυσης της (E) διαφορετικό αυτού που αναπτύξατε στο ζήτημα (i).

Θέμα 2

Δίνεται το π.α.τ

$$y' - y = 1 + 3 \sin t, \quad y(0) = a.$$

- (i) Να δώσετε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για το a , ώστε το εν λόγω π.α.τ να έχει ακριβώς μία περιοδική και φραγμένη λύση στο \mathbb{R} .
- (ii) Εξετάστε αν υπάρχει συγκλίνουσα λύση του π.α.τ, όταν $t \rightarrow +\infty$.

Θέμα 3

(i) Να λύσετε το π.α.τ

$$2(y')^2 = (y - 1)y'', \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1.$$

(ii) Δίνεται η διαφορική εξίσωση:

$$(E) \quad y' - \frac{y}{x} \ln y = \frac{y}{2 \ln y}.$$

- (α) Να επιλύσετε το π.α.τ (E) & $y(-1) = e^2$.
- (β) Υπάρχουν λύσεις y_1 και y_2 της διαφορικής εξίσωσης (E) όπου η y_1 να είναι γνήσια αύξουσα και μη φραγμένη στο $(0, +\infty)$, ενώ η y_2 να είναι γνήσια φθίνουσα και φραγμένη στο $(0, +\infty)$;
- (γ) Υπάρχει λύση της εξίσωσης η οποία ορίζεται στο $(0, 2022]$;

Θέμα 4

(i) Δοσμένης μιας διαφορικής εξίσωσης

$$(E) \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

αν $\phi = \frac{Q_x - P_y}{P - Q}$ είναι μια συνάρτηση του $x + y$, δείξτε ότι η συνάρτηση $\Phi(u) = e^{\int \phi(u)du}$, όπου $u = x + y$, είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της (E).

(ii) Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad 3(x^2 + xy^2 + 2y^3)y' + 5x^2 + 2xy + 3y^3 = 0$$

έχει ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $p(x, y) = x^\kappa + y^\lambda + \mu xy$, όπου κ, λ και μ κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Να απαντηθούν τα Θέματα 2,3 και ένα από τα 1,4.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Only Maths

-Official-